ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 28, No. 4, 1977

DÉRIVÉ CONVEXE D'UNE LOI DE PROBABILITÉ ET LOIS STABLES. APPLICATION A UN PROBLÈME D'ISOMORPHISME

PAR

MICHEL SCHREIBER[†]

ABSTRACT

The "convex derived set" of a symmetric probability law F on the real line is defined as the set of limits of laws $*_{j=1}^{k_n} F(t_j^n x)$, $\inf_{1 \leq j \leq k_n} t_j^n \to \infty$ if $n \to \infty$ and the stable laws it contains are exhibited. A new criterion of stochastic compacity of the set of the powers of a probability law is established. Finally, an isomorphism theorem between some l^p and L^0 spaces is given.

0. Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier certains théorèmes de convergence étroite de lois de probabilité et d'en déduire la généralisation à des espaces non localement convexes d'un résultat de Lindenstrauss et Tzafriri [7].

Etant donnée une loi de probabilité symétrique F sur la droite réelle, on cherche quelles sont les lois stables qui peuvent être obtenues comme limites de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes de loi F, convenablement normalisées.

L'étude du dérivé $D(F)$ de la loi F, ensemble des points d'accumulation non dégénérés, pour la convergence étroite, de l'ensemble des puissances de F au sens de la convolution, a permis à Doeblin [3] de caractériser le domaine d'attraction des lois stables non normales et d'obtenir de nombreux résultats concernant les domaines d'attraction partielle.

On généralise ici cette notion en considérant le dérivé convexe de F, soit $DC(F)$, ensemble des points d'accumulation de la classe des lois des sommes de variables aléatoires indépendantes, uniformément asymptotiquement négligeables, construites à partir de F. On montre alors dans le paragraphe 2 qu'on peut associer à F deux réels α et β, $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 2$, tels que la loi stable

[†] Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 224 "Processus stochastiques et applications".

Received June 14, 1976

d'exposant q appartienne à $DC(F)$ si et seulement si $\alpha \leqq q \leqq \beta$ ($0 < q \leqq \beta$ si $\alpha = 0$).

La condition $\beta = 2$ est équivalente au fait que la loi normale fait partie de $DC(F)$. Elle est aussi équivalente, par le théorème de P. Lévy, au fait que la loi normale est dans $D(F)$. En ce qui la concerne, l'introduction de $DC(F)$ n'apporte donc rien. D'autre part si la loi normale n'appartient pas à $DC(F)$, soit si $\beta < 2$, les constantes α et β ne dépendent en fait que du comportement à l'infini de la fonction H, définie pour $x \geqq 0$ par $H(x) = 1 - F(x)$, c'est-à-dire la queue de la loi F.

De plus la condition $\alpha > 0$ est équivalente au critère de compacité obtenu par Feller [5] pour l'ensemble des puissances de F. Au paragraphe 3 on montre que ce critère s'exprime encore de la façon suivante: soit $(X_n, n \geqq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi symétrique F définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$; on note $[X, 0]$ le complété pour une métrique invariante par translation associée à la convergence en probabilité de la variété linéaire engendrée par la suite $(X_n, n \geqq 1)$ et $[X, p]$ la fermeture dans L^p, $p > 0$, de la même variété: alors la loi F est stochastiquement compacte si et seulement s'il existe un $p > 0$ tel que $[X, 0] = [X, p]$ (et donc $[X, 0] = [X, p']$, $0 < p' \leqq p$).

Enfin, dans le paragraphe 4, on montre que tout espace l^q, $\alpha \leqq q \leqq \beta$, est isomorphe à un sous-espace de $[X, 0]$ et donc aussi de $[X, p']$, $0 < p' \leqq p$, si la loi F est stochastiquement compacte.

1. Rappels et résultats préliminaires

Etant donnée une loi de probabilité F sur la droite réelle, on note encore F sa fonction de répartition. A toute loi de probabilité F on associe la classe des lois définies par les fonctions de répartition $F(ax + b)$, $a > 0$, b réel, notée $\mathrm{Cl}(F)$. La classe dégénérée est la classe associée à la loi de probabilité affectant la masse 1 au point 0.

On dit qu'une suite de classes $(\mathrm{Cl}(F_n), n \geqq 1)$ converge s'il existe dans chaque classe $\mathrm{Cl}(F_n)$ un élément de la forme $F_n(a_n x + b_n)$ tel que la suite des lois définies par les fonctions de répartition $F_n(a_n x + b_n)$ converge vers une loi de probabilité non dégénérée. On dira, par un abus de langage usuel, que la suite des lois $(F_n, n \geqq 1)$ converge, bien qu'il s'agisse en fait de convergence de classe des lois.

Etant donnée une famille infinie de lois $(F_i, i \in I)$, on dit qu'une loi F non dégénérée est un point d'accumulation de la famille $(F_i, i \in I)$ s'il existe une suite infinie d'éléments de la famille qui converge vers F et, suivant Doeblin, on appelle dérivé d'une famille de lois l'ensemble de ses points d'accumulation.

Il est essentiel dans les questions étudiées dans ce travail de ne considérer que la convergence vers des lois non dégénérées. Si seule la classe dégénérée est limite possible pour toute suite extraite de la famille, le dérivé est vide.

Soient F une loi de probabilité, F^{n*} sa $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution. On appelle ensemble des puissances de F l'ensemble des classes $(\mathrm{Cl}(F^{n*}), n \geqq 1)$.

DÉFINITION 1.1. On appelle dérivé de la loi de probabilité F, et on note $D(F)$, le dérivé de l'ensemble des puissances de F. Quand une loi de probabilité F' est dans le dérivé de la loi F, on dit que F est dans le domaine d'attraction partielle de F'. Si toute la suite $(F^{n*}, n \geqq 1)$ converge vers F', alors unique élément de $D(F)$, on dit que F est dans le domaine d'attraction de F'.

Au vu de ces définitions, deux types de problèmes se posent naturellement: on peut, étant donnée une loi de probabilité F, étudier son dérivé, en particulier déterminer les lois qui en font partie. C'est ce qu'a fait en particulier Doeblin [3]. On peut aussi, étant donnée une loi F', étudier son domaine d'attraction partielle; par exemple [6].

Dans tout ce qui suit, on ne s'intéresse qu'aux lois de probabilité symétriques.

C'est pourquoi on se contentera d'énoncer les rappels nécessaires seulement dans ce cas. Le dérivé d'une loi est uniquement composé de lois indéfiniment divisibles. Une loi symétrique est indéfiniment divisible si et seulement si sa fonction caractéristique φ est de la forme $e^{-\psi}$ avec $\psi(t) = \sigma^2 t^2 + 2\int_0^\infty (1 - \cos tu)\, dM(u)$ où dM est la mesure de Lévy de la loi F, c'est-à-dire une mesure positive telle que $\int_0^\infty (u^2 \wedge 1)\; dM(u) < \infty$, et $\sigma \geqq 0$ (la notation $a \wedge b$ signifie l'infimum de a et b). A une mesure de Lévy dM, on associera la fonction de Lévy M, continue à gauche, définie pour $x > 0$ par $M(x) = \int_x^\infty dM(u)$. Une fonction de Lévy est donc positive, décroissante, telle que $\lim_{x\to\infty} M(x) = 0$. Une loi indéfiniment divisible est donc caractérisée par le couple (σ^2, M).

Toute loi indéfiniment divisible a un domaine d'attraction partielle non vide. Dire qu'une loi F est dans le domaine d'attraction partielle d'une loi F' signifie, dans le cas où F est symétrique, qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(k_n, n \geqq 1)$ et une suite de réels positifs $(a_n, n \geqq 1)$ telles que la suite des lois définies par les fonctions de répartition $F^{k_n *}(a_n x)$ converge vers la loi F. En d'autres termes, si les variables X_j^n sont toutes de même loi F et indépendantes pour chaque n, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la suite des variables $Z_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_j^n / a_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi F' quand $n \to \infty$. Les variables X_j^n / a_n sont uniformément asymptotiquement négligeables, c'est-à-dire que $\sup_{1 \leqq j \leqq k_n} P\{|X_j^n|/a_n > \varepsilon\} \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Or la suite des lois de probabilité des sommes $\zeta_n = \sum_{j=1}^{k_n} \xi_j^n$ de variables aléatoires indépendantes, symétriques, uniformément asymptotiquement négligeables, de fonctions de répartition F_j^n respectivement, converge si et seulement si les lois indéfiniment divisibles de fonctions caractéristiques $e^{-\psi_n}$, avec $\psi_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n} 2\int_0^\infty (1 - \cos tu)\, dF_j^n(u)$, convergent, et les lois limites sont identiques. Les lois indéfiniment divisibles définies par les fonctions ψ_n sont appelées lois accompagnantes des lois des variables ζ_n. [6].

Enfin, pour que les lois des variables ζ_n convergent, il faut et il suffit qu'il existe une fonction M, définie pour $x > 0$, décroissante et telle que $\lim_{x\to\infty} M(x) = 0$ et une constante $\sigma \geqq 0$ telles que $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} (1 - F_j^n(x)) = M(x)$ en tout point de continuité de M et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_0^\varepsilon x^2 dF_j^n(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_0^\varepsilon x^2 dF_j^n(x) = \sigma^2.$$

Parmi les lois indéfiniment divisibles, on distingue la classe des lois stables. Une loi indéfiniment divisible, symétrique, est dite stable d'exposant p, $0 < p < 2$, si le couple (σ^2, M) est de la forme $(0, \lambda x^{-p})$ avec $\lambda > 0$. La loi normale $\sigma > 0$, $M \equiv 0$, est aussi une loi stable qu'on appellera parfois par commodité loi stable d'exposant 2. Une loi de probabilité symétrique F est dans le domaine d'attraction d'une loi stable F' s'il existe une suite de constantes positives $(a_n, n \geqq 1)$ telle que la suite des lois $F^{*n}(a_n x)$ converge vers F' quand $n \to \infty$.

On prendra garde aux notations utilisées dans ce travail parfois légèrement différentes de celles de [6]; M est une fonction décroissante et σ^2 la moitié de la constante habituellement ainsi désignée.

Si F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité symétrique, on note H la fonction définie pour $x \geqq 0$ par

$$H(x) = 1 - F(x).$$

La fonction H peut être considérée comme la fonction de Lévy de la loi indéfiniment divisible de fonction caractéristique $e^{-\psi}$ avec $\psi(t) = 2\int_0^\infty (1 - \cos tu)\, dF(u)$. Par abus de langage H sera alors appelée fonction de Lévy de la loi accompagnante de F.

A la fonction F on associe encore les fonctions V et U définies pour $x \geqq 0$ respectivement par

$$V(x) = \int_0^x y^2 dF(y) = -\int_0^x y^2 dH(y),$$

$$U(x) = V(x) + x^2 H(x) = \int_0^\infty (y^2 \wedge x^2)\, dF(y).$$

Dans tout ce qui suit on fera les hypothèses suivantes sur la loi F:

HYPOTHÈSES. H_1) $H(x) > 0$ si $x \geqq 0$,
H_2) $V(x) > 0$ si $x > 0$ et $\lim_{x \to \infty} V(x) = \infty$.

L'hypothèse H_1 se justifie par le fait que si la fonction H s'annule à partir d'une valeur finie, la loi de probabilité F est dans le domaine d'attraction de la loi normale et l'étude faite dans ce travail n'a plus de raison d'être. Pour les mêmes raisons la variance totale est supposée infinie. De plus, dans les questions étudiées c'est le comportement pour les grandes valeurs de x des quantités considérées qui interviendra. Une modification locale de la loi F au voisinage de l'origine de façon à avoir $V(x) > 0$ si $x > 0$ ne changera rien à la nature du problème.

Nous allons d'abord établir quelques propriétés des fonctions H, V et U associées à une loi symétrique F satisfaisant aux hypothèses H_1 et H_2.

PROPOSITION 1.2. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que*

$$\frac{t^2 H(t)}{V(t)} < \gamma \qquad \text{pour tout} \qquad t > 1.$$

b) *Il existe un réel* r, $0 < r < 2$, *et une constante* $c > 0$ *tels que*

$$\frac{U(tx)}{U(t)} < Cx^r \qquad \text{pour} \qquad x > 1, \qquad t > 1.$$

c) *Il existe un réel* r, $0 < r < 2$, *et une constante* $C' > 0$ *tels que*

$$\frac{V(tx)}{V(t)} < C'x^r \qquad \text{pour} \qquad x > 1, \qquad t > 1.$$

(*C'est la même constante* r *qui intervient dans les conditions* b) *et* c)).

L'hypothèse $t > 1$, faite par commodité, pourrait être remplacée par $t > \tau > 0$.

De $V(tx) = V(t) + \int_t^{tx} u^2 dF(u) = V(t) - \int_t^{tx} u^2\, dH(u)$, on tire

$$t^2(H(t) - H(tx)) \leqq V(tx) - V(t) \leqq t^2 x^2 (H(t) - H(tx)); \tag{1}$$

d'où

$$U(tx) = V(tx) + t^2 x^2 H(tx) < V(t) + t^2 x^2 H(tx) = x^2 U(t) + (1 - x^2) V(t).$$

Si la condition a) est vérifiée, on a $U(t) < (\gamma + 1)\, V(t)$, d'où

$$U(tx) < x^2 U(t) \left(1 - \frac{x^2 - 1}{(\gamma + 1) x^2}\right).$$

Soit $x_0 > 1$ fixé. En posant $\lambda_{x_0} = 1 - (x_0^2 - 1)/(\gamma + 1)x_0^2 < 1$, on a, pour tout $t > 1$

$$U(tx_0) < \lambda_{x_0} x_0^2 U(t) = x_0^r U(t),$$

avec $0 < r < 2$. Pour tout $x > 1$, on peut trouver $k \in \mathbf{N}$ tel que $x_0^k \leqq x < x_0^{k+1}$. La fonction U étant non décroissante,

$$U(tx) \leqq U(tx_0^{k+1}) \leqq x_0^{(k+1)r} U(t) \leqq x_0^r x^r U(t),$$

et en posant $C = x_0^r$, on a $U(tx)/U(t) < Cx^r$, d'où a) $\Rightarrow$ b).

On en déduit

$$V(tx) < U(tx) < Cx^r U(t) < C(\gamma + 1)x^r V(t),$$

soit en posant $C' = C(\gamma + 1)$, a) et b) $\Rightarrow$ c).

De (1), on tire pour tout $k \in \mathbf{N}$, si c) est vérifiée,

$$t^2(H(tx^k) - H(tx^{k+1})) < (C'x^r - 1)x^{-2k} V(tx^k) < (C'x^r - 1)C'x^{k(r-2)} V(t),$$

soit en sommant sur k,

$$t^2 H(t) < (C'x^r - 1)C' \sum_{k=0}^{\infty} x^{k(r-2)} V(t).$$

Puisque $x > 1$, la série $\Sigma_{k=0}^{\infty} x^{k(r-2)}$ converge. En posant $\gamma = (C'x^r - 1)\, C' \Sigma_{k=0}^{\infty} x^{k(r-2)}$ pour $x > 1$, on obtient $t^2 H(t) < \gamma V(t)$ pour $t > 1$ et c) $\Rightarrow$ a).

On suppose maintenant $U(tx) < Cx^r U(t)$ pour $t > 1$, $x > 1$. De (1) on tire

$$V(tx) + t^2 x^2 H(tx) < Cx^r\, (V(tx) + t^2 H(tx)),$$

soit encore

$$\frac{t^2 x^2 H(tx)}{V(tx)} (1 - Cx^{r-2}) < Cx^r.$$

Pour $x > x_0$ tel que $1 - Cx_0^{r-2} > 0$, on a $t^2 H(t) < \gamma' V(t)$ si $t > x$ en posant $\gamma' = Cx^r/(1 - Cx^{r-2})$. Pour avoir la relation pour $t > 1$, remarquons que si $1 < t \leqq x$, on a $t^2 H(t)/V(t) < t^2/V(t) < t^2/V(1) < x^2/V(1)$; en posant $\gamma = \gamma' \vee x^2/V(1)$, on obtient finalement $t^2 H(t) < \gamma V(t)$ si $t > 1$, soit b) $\Rightarrow$ a).

De façon symétrique on a

PROPOSITION 1.3. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

a') *Il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$m < \frac{t^2 H(t)}{V(t)} \qquad \textit{pour} \qquad t > 0.$$

b′) *Il existe un réel s,* $0 < s < 2$ *et une constante* $D > 0$ *tels que*

$$Dx^s < \frac{U(tx)}{U(t)} \qquad pour \qquad x > 1, \qquad t > 0.$$

c′) *Il existe un réel s,* $0 < s < 2$ *et une constante* $D' > 0$ *tels que*

$$D'x^{s-2} < \frac{H(tx)}{H(t)} \qquad pour \qquad x > 1, \qquad t > 0.$$

(*C'est la même constante qui intervient dans les conditions* b′) *et* c′).)

De (1), on tire

$$U(tx) \geqq U(t) + (x^2 - 1)\,t^2 H(tx);$$

si a′) est vérifiée, c'est-à-dire si $U(t) < (1 + 1/m)\,t^2 H(t)$, on déduit

$$U(t) \leqq U(tx)\left(1 - \frac{x^2 - 1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)x^2}\right).$$

Pour $x_0 > 1$ fixé il existe s, $0 < s < 2$ tel que $x_0^{-s} = 1 - (x_0^2 - 1)/(1 + 1/m)x_0^2$, d'où $U(t) < x_0^{-s} U(tx_0)$.

Pour $x > 1$, soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $x_0^k \leqq x < x_0^{k+1}$. On a

$$U(tx)x^{-s} > U(tx_0)x_0^{-(k+1)s} > U(t)x_0^{-s},$$

soit, en posant $D = x_0^{-s}$, $Dx^s U(t) < U(tx)$ et a′) $\Rightarrow$ b′).

On en déduit

$$H(tx) > \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \frac{U(tx)}{t^2 x^2} > \frac{D}{1 + \frac{1}{m}} \frac{U(t)}{t^2}\, x^{s-2} > \frac{D}{1 + \frac{1}{m}} H(t)x^{s-2}.$$

En faisant $D' = D/(1 + 1/m)$, on a $D'x^{s-2} < H(tx)/H(t)$ si $x > 1$ et a′) et b′) $\Rightarrow$ c′).

Si c′) est vérifiée on tire de (1)

$$V(tx) - V(t) < t^2 x^2 \left(\frac{1}{D'} x^{2-s} - 1\right) H(tx),$$

et pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$V\left(\frac{t}{x^k}\right) - V\left(\frac{t}{x^{k+1}}\right) < \left(\frac{1}{D'} x^{2-s} - 1\right) \frac{t^2}{x^{2k}} H\left(\frac{t}{x^k}\right) < \left(\frac{1}{D'} x^{2-s}\right) \frac{1}{D'} x^{k(s-4)} t^2 H(t).$$

D'où

$$V(t) < \frac{1}{D'^2}(x^{s-2}-1)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k(s-4)}\right) t^2 H(t).$$

La serie $\Sigma_{k=0}^{\infty} x^{k(s-4)}$ converge pour $x > 1$; en posant

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{D'^2}(x^{s-2}-1)\sum_{k=0}^{\infty} x^{k(s-4)} \quad \text{pour un tel} \quad x,$$

on obtient $m < t^2H(t)/V(t)$, soit c') $\Rightarrow$ a').

Si b') est vérifiée, on tire de (1)

$$Dx^s(V(t)+t^2H(t)) < V(t)+t^2x^2H(t).$$

D'où

$$\frac{Dx^s-1}{x^2-1} < \frac{t^2H(t)}{V(t)}$$

et b') $\Rightarrow$ a') en faisant $m = (Dx^s-1)/(x^2-1)$ pour un x tel que $Dx^s - 1 > 0$.

L'équivalence des conditions a) et c) a déjà été montrée par Feller [5] pour la proposition 1.2 et par Doeblin [3] pour la proposition 1.3.

2. Dérivé convexe

Etant donnée une loi de probabilité F symétrique sur la droite réelle, on considère le problème: quelles sont les stables qui peuvent être construites comme limites de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes, de loi F convenablement normalisée? L'étude du domaine d'attraction des lois stables donne une première réponse à la question, le résultat le plus significatif étant, [4]

Théorème. *La loi F est dans le domaine d'attraction de la loi stable d'exposant p, $0 < p \leqq 2$ si et seulement si* $\lim_{x\to\infty} x^2H(x)/V(x) = (2-p)/p$; *cette condition est équivalente à l'existence d'une fonction L, lente au sens de Karamata (pour tout $x>0$, $L(sx)/L(s)\to 1$ quand $s\to\infty$) telle que $V(x)\sim x^{2-p}L(x)$, $x\to\infty$ ou encore, si on exclut la loi normale, $H(x)\sim [(2-p)/p]\,x^{-p}L(x)$, $x\to\infty$ pour $0<p<2$.*

Dans ce cas il s'agit de la convergence de toute la suite des lois des variables de la forme $(1/t_n)\Sigma_{j=1}^{n} X_j$, les X_j étant indépendantes, de loi F, et la normalisation étant la même pour toutes les variables intervenant dans le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite.

Si F est dans le domaine d'attraction de la loi stable d'exposant p, celle-ci est dans le dérivé $D(F)$ de F, d'ailleurs réduit à cette loi. On obtient ainsi une condition suffisante pour qu'une loi stable soit dans $D(F)$.

Dans le cas où cette loi stable est la loi normale, on a plus, à savoir

THÉORÈME. (P. Lévy) *La loi F est dans le domaine d'attraction partielle de la loi normale si et seulement si* $\liminf_{x\to\infty} x^2H(x)/V(x) = 0$.

D'où un critère nécessaire et suffisant d'appartenance de la loi normale à $D(F)$ et une solution complète au problème; la normalisation est encore de la forme $(1/t_n)\sum_{j=1}^{k_n} X_j$, les constantes t_n étant identiques pour toutes les variables du $n^{\text{ième}}$ élément de la suite.

Du fait du type de normalisation considéré c'est donc l'ensemble des puissances de F et son dérivé qui sont intervenus jusqu'ici. Pour l'étude des lois stables autres que la loi normale, nous allons introduire un autre type de normalisation et de ce fait une famille de lois plus large que l'ensemble des puissances de F ainsi que le dérivé de cette famille de lois.

Soit donc $\mathscr{C}(F)$ la famille des lois de probabilité des variables de la forme $\sum_{j=1}^{k_n} X_j^n/t_j^n$, où les X_j^n sont des variables aléatoires indépendantes de même loi F et les constantes positives t_j^n telles que les variables X_j^n/t_j^n soient uniformément asymptotiquement négligeables.

DÉFINITION 2.1. On appelle dérivé convexe de F, noté $DC(F)$, l'ensemble des limites non dégénérées, pour la convergence étroite, des lois $*_{j=1}^{k_n} F(t_j^n x)$, $\inf_{1\le j\le k_n} t_j^n \to\infty$ quand $n\to\infty$.

Le dérivé convexe de F est donc le dérivé de la famille $\mathscr{C}(F)$. C'est un ensemble de lois indéfiniment divisibles, symétriques, (σ^2, M) avec $(0,0)$ exclu, qui contient $D(F)$ obtenu quand pour chaque n tous les t_j^n sont égaux.

La terminologie adoptée s'explique de la façon suivante: supposons que la loi normale ne fasse pas partie de $DC(F)$ qui contient alors seulement des lois indéfiniment divisibles $(0, M)$, $M\not\equiv 0$. Par changement d'échelle on peut toujours supposer M continue au point 1 et $M(1) = 1$. De plus, par le théorème de P. Lévy, la fonction H, considérée comme fonction de Lévy de la loi accompagnante de F, ne s'annule pas. La fonction de Lévy de la loi accompagnante de la loi $*_{j=1}^{k_n} F(t_j^n x)$ est $\sum_{j=1}^{k_n} H(t_j^n x)$, qui tend vers $M(x)$ quand $n\to\infty$. On peut normaliser cette suite de fonctions de Lévy de façon qu'elles vaillent 1 en $x = 1$ en considérant la suite des fonctions $\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n H(t_j^n x)/H(t_j^n)$ avec $\lambda_j^n = H(t_j^n)/\sum_{j=1}^{k_n} H(t_j^n)$. Avec cette normalisation on est donc amené à étudier le dérivé d'un ensemble convexe de fonctions de Lévy valant 1 au point $x = 1$.

Nous allons maintenant déterminer les lois stables qui font partie du dérivé convexe de F.

A la loi indéfiniment divisible symétrique (σ^2, M), on associe la fonction R définie par

$$R(x) = \frac{\sigma^2}{x^2} + \int_0^\infty \left(1 \wedge \frac{y^2}{x^2}\right) dM(y), \qquad x > 0.$$

C'est une fonction continue, décroissante, telle que $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$; de plus $x^2R(x)$ est croissante telle que $\lim_{x\to 0} x^2R(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^2R(x) = \infty$.

En particulier pour la loi normale $(1,0)$, $R(x) = x^{-2}$ et pour la loi stable d'exposant $0 < p < 2$, $(0, x^{-p})$, $R(x) = [2/(2-p)]x^{-p}$.

Proposition 2.2. *La suite des lois indéfiniment divisibles* $((\sigma_n^2, M_n), n \geqq 1)$ *converge si et seulement si la suite* $(R_n, n \geqq 1)$ *converge simplement vers une fonction continue* Φ *telle que* $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0$.

Supposons d'abord que la suite des lois $((\sigma_n^2, M_n), n \geqq 1)$ converge vers la loi (σ^2, M). Alors $M_n(x) \to M(x)$ pour tout x de continuité pour M. D'autre part pour tout $\varepsilon > 0$ de continuité pour M,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\varepsilon^x y^2\, dM_n(y) = \int_\varepsilon^x y^2\, dM(y),$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \left(\sigma_n^2 + \int_0^\varepsilon y^2\, dM_n(y)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \left(\sigma_n^2 + \int_0^\varepsilon y^2\, dM_n(y)\right) = \sigma^2;$$

d'où la convergence de la suite des fonctions $(x^2R_n(x), n \geqq 1)$ quand $n \to \infty$ vers $x^2R(x)$ définie par

$$x^2R(x) = \sigma^2 + \int_0^x y^2\, dM(y) + x^2 \int_x^\infty dM(y).$$

Inversement soit Φ une fonction continue telle que $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0$ et supposons que pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \Phi(x)$. On peut alors trouver une fonction J, définie pour $x > 0$, continue, telle que $x^2J(x)$ soit bornée, $\lim_{x\to\infty} x^2J(x) = 0$ et $R_n(x) < (x^2 \vee 1)\, J(x)$ pour tout $x > 0$ et tout $n \geqq 1$. La famille des lois $((\sigma_n^2, M_n), n \geqq 1)$ associées aux fonctions $(R_n, n \geqq 1)$ est compacte puisque pour tout $n \geqq 1$, $M_n(x) < x^2J(x)$ pour x grand, $M_n(x) < J(x)$ pour x petit et $\sigma_n^2 + \int_0^\varepsilon y^2\, dM_n(y) < \varepsilon^2 J(\varepsilon)$. Il s'ensuit que la suite des lois $((\sigma_n^2, M_n)$, $n \geqq 1)$ converge vers la loi (σ^2, M) et par conséquent la suite des fonctions $(R_n, n \geqq 1)$ converge, pour tout $x > 0$ vers la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \sigma^2/x^2 + \int_0^\infty (1 \wedge y^2/x^2)\, dM(y)$ et $R = \Phi$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, F est une loi de probabilité symétrique, satisfaisant aux hypothèses H_1 et H_2. La loi accompagnante de F est la loi indéfiniment divisible $(0, H)$ et sa fonction R est donc de la forme

$$R(x) = \int_0^\infty \left(1 \wedge \frac{y^2}{x^2}\right) dF(y), \qquad x > 0.$$

Avec les notations du paragraphe précédent $U(x) = x^2 R(x)$ pour $x \geqq 0$. Aux lois accompagnantes, normalisées comme ci-dessus, des lois $*_{j=1}^{k_n} F(t_j^n x)$ correspondent alors les fonctions $\Sigma_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n R(t_j^n x)/R(t_j^n)$. La recherche des lois stables de $DC(F)$ se réduit donc à la recherche des réels p, $0 < p \leqq 2$, pour lesquels il existe une suite $(k_n, n \geqq 1)$ croissante d'entiers positifs et des réels t_j^n, $\inf_{1 \leqq j \leqq k_n} t_j^n \to \infty$ quand $n \to \infty$, tels que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n \frac{R(t_j^n x)}{R(t_j^n)} = x^{-p}, \qquad x > 0.$$

Nous allons montrer que l'ensemble de ces p coïncide avec un intervalle de la droite réelle.

Définition 2.3. On appelle indices de la loi de probabilité symétrique F le couple de réels (α, β) définis par

$$\alpha = \sup\left\{p \geqq 0, \limsup_{x\to\infty} \sup_{y>x} \frac{y^p R(y)}{x^p R(x)} < \infty\right\},$$

$$\beta = \inf\left\{p \geqq 0, \liminf_{x\to\infty} \inf_{y>x} \frac{y^p R(y)}{x^p R(x)} > 0\right\}.$$

La définition du couple (α, β) est similaire à celle des indices d'une fonction d'Orlicz.

D'autre part la définition même de la fonction R implique que $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 2$.

Les lois stables d'exposant p, $0 < p \leqq 2$ appartenant à $DC(F)$ vont être celles pour lesquelles p est compris entre α et β.

Proposition 2.4. *Si $\beta = 2$, la loi normale est dans le dérivé $D(F)$ de F et donc dans le dérivé convexe $DC(F)$ de F.*

Supposons que la loi normale ne soit pas dans le dérivé de F. Par le théorème de P. Lévy, sous les hypothèses H_1 et H_2, il existe $m > 0$ tel que $m < t^2 H(t)/V(t)$; la proposition 1.3 entraîne qu'il existe un réel s, $0 < s < 2$ et une constante $D > 0$ tels que $Dx^s < U(tx)/U(t)$ pour $t > 0$ et $x > 1$, soit encore $D < x^{2-s} R(tx)/R(t)$. D'où $\beta \leqq 2 - s < 2$ et le résultat.

Proposition 2.5. *Le dérivé convexe $DC(F)$ ne contient aucune loi stable d'exposant p telle que $p < \alpha$ ou $p > \beta$. En particulier si $\beta < 2$, $DC(F)$ ne contient pas la loi normale.*

Examinons d'abord le cas $p > \beta$. Si $\beta = 2$ la proposition est claire. Si $\beta < 2$, soit $b > \beta$ et soit $(k_n, n \geqq 1)$ une suite croissante d'entiers positifs et $(t_j^n, j = 1, \cdots, k_n, n \geqq 1)$ une famille de réels, $\inf_{1 \leqq j \leqq k_n} t_j^n \to \infty$ quand $n \to \infty$, telles que la suite des fonctions R_n, définies par $R_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n R(t_j^n x)/R(t_j^n)$, $x > 0$, converge vers la fonction R d'une loi de $DC(F)$. Par définition même de β, dès que n est assez grand, donc $\inf_{1 \leqq j \leqq k_n} t_j^n$ assez grand, on a, si $x > 1$, $R(t_j^n x)/R(t_j^n) > Bx^{-b}$ avec $B > 0$. D'où $R_n(x) > \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n B x^{-b} = Bx^{-b}$ et à la limite $R(x) > Bx^{-b}$. Il ne peut donc y avoir de loi stable d'exposant $p > b$ dans $DC(F)$ et en choisissant b arbitrairement voisin de β on obtient le résultat pour $p > \beta$.

De même si $\alpha = 0$ il n'y a rien à montrer. Si $\alpha > 0$ et si $0 < a < \alpha$, on montre comme précédemment que si $x > 1$, $R(x) < Ax^{-a}$ et on en déduit qu'il ne peut y avoir de loi stable d'exposant inférieur à α dans $DC(F)$.

THÉORÈME 2.6. *Pour tout p, $\alpha \leqq p \leqq \beta$, $(0 < p \leqq \beta$ si $\alpha = 0)$ la loi stable d'exposant p est dans $DC(F)$.*

Pour montrer ce résultat, nous allons étudier le comportement d'intégrales du type $\int_0^\infty R(tx)/R(t)\,d\lambda_n(t)$, où les λ_n sont des probabilités portées par $]u_n, \infty[$, $u_n \to \infty$, plutôt que les combinaisons convexes auxquelles on reviendra ensuite par un découpage convenable de l'intégrale. Les techniques utilisées pour l'étude de ces intégrales sont assez proches de celles utilisées par Lindenstrauss et Tzafriri dans leur étude des espaces d'Orlicz de suites [7].

A tout $p \geqq 0$, on associe la fonction définie pour $x > 0$ par

$$h_p(x) = x^p R(x).$$

Supposons d'abord $\alpha < \beta$, et soit p, $\alpha < p < \beta$.

LEMME 2.7. *Il existe une double suite $(u_n, v_n, n \geqq 1)$ de réels telle que $1 \leqq u_n \leqq v_n$ pour tout n, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n/u_n = \infty$ et $h_p(x) > h_p(u_n) = h_p(v_n)$ pour $u_n < x < v_n$.*

Du choix même de p, $\alpha < p < \beta$, et de la continuité de la fonction h_p, il résulte qu'à toute suite croissante $(\tau_n, n \geqq 1)$ de réels tendant vers l'infini on peut faire correspondre des réels arbitrairement grands $x_n < y_n < z_n < t_n$ tels que $h_p(y_n)/h_p(x_n) = h_p(z_n)/h_p(t_n) = \tau_n$ pour tout $n \geqq 1$. Notons w_n celle des deux quantités y_n ou z_n où h_p prend la plus grande valeur et soient

$$u_n = \sup\{x, x \leqq w_n, h_p(x) = \max(h_p(x_n), h_p(t_n))\},$$

$$v_n = \inf\{x, x \geqq w_n, h_p(x) = \max(h_p(x_n), h_p(t_n))\}.$$

On a bien alors $h_p(x) > h_p(u_n) = h_p(v_n)$ pour $u_n < x < v_n$.

De plus $v_n/u_n > w_n/u_n$ et $w_n^p/u_n^p > w_n^p R(w_n)/u_n^p R(u_n) = \tau_n$, d'où $v_n/u_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

PROPOSITION 2.8. *On suppose $\alpha < \beta$. Alors pour tout p, $\alpha \leqq p \leqq \beta$ ($0 < p \leqq \beta$ si $\alpha = 0$), il existe une double suite de réels $(u_n, v_n, n \geqq 1)$, $1 \leqq u_n < v_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n/u_n = \infty$ et une suite $\{\lambda_n, n \geqq 1\}$ de probabilités, de supports respectifs $[u_n, v_n]$, telles que la suite des fonctions $\int_{u_n}^{v_n} R(tx)/R(t)\, d\lambda_n(t)$ converge, pour tout $x > 0$, vers la fonction x^{-p}, $x > 0$, quand $n \to \infty$.*

Soit $(u_n, v_n, n \geqq 1)$ la double suite définie au lemme 2.7 et soit λ_n la probabilité sur $\mathbf{R}^+$ définie par $d\lambda_n(t) = (1/D_n)\, R(t)\, t^{p-1}\, 1_{[u_n, v_n]}(t)\, dt$ où $1_{[u_n, v_n]}(t)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[u_n, v_n]$ et $D_n = \int_{u_n}^{v_n} R(t)\, t^{p-1}\, dt$.

On définit la fonction G_n, pour $x > 0$, par

$$G_n(x) = \frac{1}{D_n} \int_{u_n}^{v_n} R(tx)\, t^{p-1}\, dt.$$

On a

$$D_n = \int_{u_n}^{v_n} h_p(t) \frac{dt}{t} > h_p(u_n) \log \frac{v_n}{u_n} = h_p(v_n) \log \frac{v_n}{u_n}.$$

Par changement de variable, il vient,

$$G_n(x) = \frac{x^{-p}}{D_n} \int_{u_n x}^{v_n x} R(t)\, t^{p-1} dt = x^{-p}\left[1 + \frac{1}{D_n} \int_{u_n x}^{u_n} R(t)\, t^{p-1}\, dt \right.$$
$$\left. + \frac{1}{D_n} \int_{v_n}^{v_n x} R(t)\, t^{p-1}\, dt \right].$$

Supposons d'abord $1 \leqq x \leqq \rho_n$, la suite $(\rho_n, n \geqq 1)$ étant précisée ultérieurement. On a

$$\int_{u_n}^{u_n x} R(t)\, t^{p-1} dt = \int_{u_n}^{u_n x} h_p(t) \frac{dt}{t} \leqq \sup_{u_n \leqq t \leqq u_n x} h_p(t) \int_{u_n}^{u_n x} \frac{dt}{t}.$$

Soit θ, $1 \leqq \theta \leqq x$ tel que $\sup_{u_n \leqq t \leqq u_n x} h_p(t) = h_p(\theta u_n)$; on a

$$\frac{h_p(\theta u_n)}{h_p(u_n)} = \theta^p \frac{R(\theta u_n)}{R(u_n)} \leqq \theta^p \leqq x^p.$$

On en déduit

$$\frac{1}{D_n} \int_{u_n}^{u_n x} R(t) t^{p-1}\, dt \leqq \frac{x^p \log x}{\log \frac{v_n}{u_n}} \leqq \frac{\rho_n^p \log \rho_n}{\log \frac{v_n}{u_n}}.$$

En choisissant la suite $(\rho_n, n \geqq 1)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ et $\lim_{n\to\infty}[\rho_n^p \log \rho_n / \log (v_n/u_n)] = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n} \int_{u_n}^{u_n x} R(t)\, t^{p-1}\, dt = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \geqq 1.$$

On montre de même que $\lim_{n\to\infty}(1/D_n)\int_{v_n}^{v_n x} R(t)\, t^{p-1} dt = 0$, d'où finalement

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = x^{-p} \quad \text{si} \quad x > 1.$$

On traite de même le cas $0 < x \leqq 1$. Soit maintenant $0 < \rho_n \leqq x \leqq 1$. La suite $(u_n, n \geqq 1)$ étant croissante vers l'infini avec n, on peut choisir la suite $(\rho_n, n \geqq 1)$ décroissante vers 0 avec $\rho_n u_n > 1$ pour tout n. On a $(y/x)^{-2} < R(y)/R(x)$, $1 \leqq x < y$. En raisonnant comme ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{D_n} \int_{u_n x}^{u_n} R(t) t^{p-1} dt < \frac{\rho_n^{p-2} \log \dfrac{1}{\rho_n}}{\log \dfrac{v_n}{u_n}}.$$

En choisissant la suite $(\rho_n, n \geqq 1)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n^{p-2} \log \dfrac{1}{\rho_n}}{\log \dfrac{v_n}{u_n}} = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n} \int_{u_n x}^{u_n} R(t)\, t^{p-1}\, dt = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqq 1.$$

En procédant de même on obtient aussi $\lim_{n\to\infty}(1/D_n)\int_{v_n x}^{v_n} R(t)\, t^{p-1} dt = 0$ pour $0 < x \leqq 1$, soit finalement

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = x^{-p} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqq 1.$$

Il s'ensuit que pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = x^{-p}$, d'où la proposition si $\alpha < p < \beta$.

Proposition 2.9. *Si $\alpha < \beta$, pour tout p, $\alpha \leqq p \leqq \beta$, (ou $0 < p \leqq \beta$ si $\alpha = 0$) la loi stable d'exposant p est dans $DC(F)$.*

Soit d'abord p fixé, $\alpha < p < \beta$, et soit pour tout entier $n \geqq 1$, $u_n = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n < v_n < t_{k_n+1}^n$ une suite croissante de réels tels que pour tout $j = 0, 1, \cdots, k_n$, on ait

$$\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} t^{p-1}dt = \int_{u_n}^{v_n} R(t)\,t^{p-1}dt = D_n.$$

Une telle suite existe puisque

$$\int_{u_n}^{v_n} R(t)\,t^{p-1}\,dt \leqq R(u_n)\int_{u_n}^{v_n} t^{p-1}dt \leqq \int_{u_n}^{v_n} t^{p-1}dt.$$

Il existe donc une valeur $t_1^n \leqq v_n$ dès que $R(u_n) \leqq 1$. Définissons les fonctions $\underline{G_n}$ et $\overline{G_n}$ par

$$\underline{G_n}(x) = \frac{1}{D_n}\sum_{j=0}^{k_n-1} R(t_{j+1}^n x)\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} t^{p-1}dt = \sum_{j=0}^{k_n-1} R(t_{j+1}^n x),$$

$$\overline{G_n}(x) = \frac{1}{D_n}\sum_{j=0}^{k_n} R(t_j^n x)\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} t^{p-1}dt = \sum_{j=0}^{k_n} R(t_j^n x).$$

On a

$$\underline{G_n}(x) \leqq G_n(x) \leqq \overline{G_n}(x),$$

et

$$\overline{G_n}(x) - \underline{G_n}(x) = R(t_{k_n}^n x) + \sum_{j=0}^{k_n-1} (R(t_j^n x) - R(t_{j+1}^n x)) = R(t_0^n x) = R(u_n x).$$

Pour tout $x > 0$ fixé, $\lim_{n\to\infty} xu_n = \infty$ et par conséquent $\lim_{n\to\infty} R(u_n x) = 0$.

La fonction $\overline{G_n}$ peut être considérée comme la fonction R associée à la variable $\Sigma_{j=0}^{k_n} Y_j^n/t_j^n$ où les Y_j^n sont des variables aléatoires indépendantes, indéfiniment divisibles, de même loi de probabilité définie par $(0, H)$; la suite des variables $\Sigma_{j=0}^{k_n} Y_j^n/t_j^n$ converge en loi, quand $n \to \infty$, vers une variable de loi stable d'exposant p. Les variables Y_j^n jouent ici le rôle de variables dont la loi de probabilité est la loi accompagnante de F. La suite des lois $*_{j=1}^{k_n} F(t_j^n x)$ converge donc aussi vers la loi stable d'exposant p. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \underline{G_n}(1) = \lim_{n\to\infty} \overline{G_n}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{k_n} R(t_j^n x) = \sum_{j=0}^{k_n} R(t_j^n)\frac{R(t_j^n x)}{R(t_j^n)},$$

le résultat est démontré pour $\alpha < p < \beta$.

D'autre part $DC(F)$ est fermé, sauf en la loi dégénérée qui par hypothèse n'en fait pas partie. Donc si on choisit une suite $(p_n, n \geqq 1)$, $p_n < \beta$ telle que $\lim_{n\to\infty} p_n = \beta$, la loi stable d'exposant β si $\beta < 2$, ou la loi normale si $\beta = 2$, appartient à $DC(F)$. De même si $\alpha > 0$, la loi stable d'exposant α est dans $DC(F)$.

Supposons maintenant $0 < \alpha = \beta$.

Si $\alpha = \beta = 2$, il résulte des propositions 2.4 et 2.5 que la seule loi stable qui se trouve dans $DC(F)$ est la loi normale. Supposons donc $\beta < 2$ et soient

$$l_\beta = \liminf_{x\to\infty} \inf_{y>x} \frac{y^\beta R(y)}{x^\beta R(x)} \quad \text{et} \quad L_\beta = \limsup_{x\to\infty} \sup_{y>x} \frac{y^\beta R(y)}{x^\beta R(x)}.$$

Si $l_\beta = 0$ et $L_\beta = \infty$, on obtient, en procédant comme ci-dessus, que la loi stable d'exposant β est dans $DC(F)$.

Sinon, posons encore $p = \alpha = \beta$. Supposons $l_\beta > 0$ et $L_\beta < \infty$. Il existe alors un $t_0 > 0$ et deux constantes $0 < A < \infty$ et $0 < B < \infty$ tels que si $t \geqq t_0$, $x > 1$, on ait $B < h_p(tx)/h_p(t) < A$. Soit encore G_n la fonction définie pour $x > 0$ par $G_n(x) = (1/D_n)\int_{u_n}^{v_n} R(tx)\, t^{p-1}\, dt$ où $(u_n, v_n, n \geqq 1)$ est une double suite de réels, $1 \leqq u_n < v_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n/u_n = \infty$. Dès que $u_n \geqq t_0$, on a $D_n > Bh_p(u_n)\log(v_n/u_n)$ et $D_n > (1/A)h_p(v_n)\log(v_n/u_n)$. Si $x \geqq 1$,

$$\frac{1}{D_n}\int_{u_n}^{u_n x} R(t)\, t^{p-1}\, dt < \frac{1}{D_n} R(u_n)\, u_n^p \frac{x^p}{p} < \frac{x^p}{Bp} \frac{1}{\log \dfrac{v_n}{u_n}}$$

et

$$\frac{1}{D_n}\int_{v_n}^{v_n x} R(t) t^{p-1}\, dt < \frac{Ax^p}{p} \frac{1}{\log \dfrac{v_n}{u_n}}.$$

D'où $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = x^{-p}$ pour $x > 1$.

Si $x < 1$, dès que $u_n x \geqq t_0$,

$$\begin{aligned} D_n \int_{u_n x}^{u_n} R(t) t^{p-1}\, dt &< \frac{1}{D_n} R(u_n x) \frac{u_n^p}{p} \\ &< \frac{1}{D_n} R(u_n) u_n^p \frac{x^{-p}}{Bp} < \frac{x^{-p}}{B^2 p} \frac{1}{\log \dfrac{v_n}{u_n}} \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{D_n}\int_{v_n}^{v_n x} R(t)\, t^{p-1}\, dt < \frac{Ax^{-p}}{Bp} \frac{1}{\log \dfrac{v_n}{u_n}}.$$

D'où, pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = x^{-p}$ et la loi stable d'exposant p est dans $DC(F)$.

Supposons maintenant $l_\beta = 0$ et $L_\beta < \infty$. Il existe alors $x_0 > 0$ et une constante A, $0 < A < \infty$ tels que $h_p(y)/h_p(x) < A$ pour $y > x > x_0$. Alors le rapport $h_p(y)/h_p(x)$ est aussi borné inférieurement localement. Plus précisément

LEMME 2.10. *S'il existe une constante* $0 < A < \infty$ *telle que* $h_p(y)/h_p(x) < A$, $x_0 < x < y$, *alors pour tout* m, $0 < m < 1$, *il existe une double suite de réels* $(u_n, v_n, n \geqq 1)$, *telle que* $1 \leqq u_n < v_n$ *pour tout* n, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n/u_n = \infty$ *et* $h_p(v_n)/h_p(u_n) > m$ *et une constante* $B > 0$ *telle que* $B < h_p(y)/h_p(x)$ *pour* $u_n < x < y < v_n$.

A tout m, $0 < m < 1$, et $u > x_0$, on associe $v(u, m) = \inf\{v > u, h_p(v) < m\, h_p(u)\}$ et on note $\lambda(u, m) = v(u, m)/u$. Alors $\limsup_{u\to\infty} \lambda(u, m) = \infty$. En effet s'il existait un m tel que $\limsup_{u\to\infty} \lambda(u, m) < \infty$, on pourrait trouver une constante λ_0 telle que $\lambda(u, m) < \lambda_0$ pour $u > u_0$, et pour tout $n \geqq 1$ un v_n tel que $h_p(v_n)/h_p(u) < m^n$ et $v_n/u_n < \lambda_0^n$. D'où

$$\frac{h_p(v_n)}{h_p(u)} < m^{\log(v_n/u)/\log\lambda_0} = \left(\frac{v_n}{u}\right)^{-\rho} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{\log \dfrac{1}{m}}{\log \lambda_0} > 0.$$

On en déduit, si $v_n \leqq y < v_{n+1}$, $R(y)/R(u) \leqq R(v_n)/R(u) < (v_n/u)^{-(p+\rho)}$, d'où $R(y)/R(u) < \lambda_0^{p+\rho}(y/u)^{-(p+\rho)}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $p = \alpha$.

Puisque $\limsup_{u\to\infty} \lambda(u, m) = \infty$, il existe une double suite $(u_n, v_n, n \geqq 1)$ telle que $1 \leqq u_n < v_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n/u_n = \infty$ pour laquelle $h_p(y)/h_p(u_n) > m$ pour $u_n < y < v_n$ et par conséquent

$$\frac{m}{A} < \frac{h_p(y)}{h_p(x)} = \frac{h_p(y)}{h_p(u_n)} \cdot \frac{h_p(u_n)}{h_p(x)} \quad \text{pour} \quad u_n < x < y < v_n.$$

D'où le résultat en faisant $B = m/A$.

Considérons encore la fonction G_n, définie pour $x > 0$ par $G_n(x) = (1/D_n) \int_{u_n}^{v_n} R(tx)\, t^{p-1}\, dt$, les suites $(u_n, v_n, n \geqq 1)$ étant définies comme dans le lemme 2.10. Alors pour tout $u_n < t < v_n$, $B < h_p(t)/h_p(u_n) < A$ et $B < h_p(v_n)/h_p(t) < A$, d'où encore $D_n > B\, h_p(u_n) \log(v_n/u_n)$ et $D_n > (1/A) h_p(v_n) \log(v_n/u_n)$. Pour $x \geqq 1$, on obtient les mêmes majorations que ci-dessus et la convergence de $G_n(x)$ vers x^{-p} quand $n \to \infty$. Si $x < 1$ on a encore la même majoration que précédemment pour $(1/D_n) \int_{v_n x}^{v_n} R(tx)\, t^{p-1} dt$.

Considérons maintenant $\int_{u_n x}^{u_n} R(t)\, t^{p-1}\, dt$. Pour tout $b > p$, il existe une constante $B > 0$ telle que si $1 \leqq t < u_n$, alors $B(u_n/t)^{-b} < R(u_n)/R(t)$. Pour n tel que $u_n x > 1$, on a donc

$$\int_{u_n x}^{u_n} R(t) t^{p-1} dt < R(u_n)\, u_n^b \int_{u_n x}^{u_n} t^{p-b-1} dt < R(u_n)\, u_n^p \frac{x^{p-b}}{b-p}$$

et donc

$$\frac{1}{D_n}\int_{u_n x}^{u_n} R(t)\,t^{p-1}\,dt < \frac{1}{B}\frac{x^{p-b}}{p}\frac{1}{\log\dfrac{v_n}{u_n}}.$$

On a donc encore $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = x^{-p}$ pour $0 < x < 1$ et finalement pour $x > 0$. La loi stable d'exposant p est dans $DC(F)$.

On peut montrer un lemme analogue au lemme 2.10 si $l_\beta > 0$ et $L_\beta = \infty$ et en déduire que la loi stable d'exposant p est dans $DC(F)$. D'où

PROPOSITION 2.11. *Si $0 < \alpha = \beta \leqq 2$, la loi stable d'exposant α est dans $DC(F)$.*

Le théorème 2.6 se déduit des propositions 2.9 et 2.11.

Comme nous l'avons vu, si $\beta < 2$, la loi normale n'appartient pas au dérivé convexe de F. Or pour tout p, $0 \leqq p \leqq 2$

$$\frac{y^p R(y)}{x^p R(x)} = \frac{y^p H(y)}{x^p H(x)}\,\frac{1+\dfrac{V(y)}{y^2 H(y)}}{1+\dfrac{V(x)}{x^2 H(x)}}.$$

Par la proposition 1.3, $\beta < 2$ est équivalent à l'existence d'une constante $m > 0$ telle que $0 < V(x)/x^2 H(x) < 1/m$ pour $x > 0$. D'où

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{y^p H(y)}{x^p H(x)} < \frac{y^p R(y)}{x^p R(x)} < \frac{m+1}{m}\,\frac{y^p H(y)}{x^p H(x)}.$$

Si on définit deux indices à partir de la fonction H, soient

$$\alpha_H = \sup\left\{p, \limsup_{x\to\infty}\,\sup_{y>x}\frac{y^p H(y)}{x^p H(x)} < \infty\right\},$$

$$\beta_H = \inf\left\{p, \liminf_{x\to\infty}\,\inf_{y>x}\frac{y^p H(y)}{x^p H(x)} > 0\right\},$$

alors si $\beta < 2$, $\alpha_H = \alpha$ et $\beta_H = \beta$. De plus par la proposition 2.4, si $\beta = 2$, alors $\beta_H = 2$. D'où

PROPOSITION 2.12. *L'indice β ne dépend en fait que de la fonction H, queue de la loi de probabilité F, et par conséquent aussi l'appartenance de la loi normale au dérivé convexe de F. Si $\beta < 2$, c'est-à-dire si la loi normale ne fait pas partie de $DC(F)$, l'intervalle (α, β) déterminant les lois stable de $DC(F)$ ne dépend que de la fonction H.*

Si $\beta = 2$, alors $\alpha_H \leqq \alpha$. En effet si $\alpha_H = 0$, c'est clair; si $\alpha_H > 0$, soit $0 < a < \alpha_H$; il existe $x_0 > 0$ et une constante $A > 0$ tels que

$$\frac{H(y)}{H(x)} < A\left(\frac{y}{x}\right)^{-a}, \qquad x_0 < x < y.$$

De

$$V(y) = V(x) - \int_x^y u^2\, dH(u) = V(x) + x^2H(x) - y^2H(y) + 2\int_x^y uH(u)\, du,$$

on tire

$$U(y) \leqq U(x) + \frac{2A}{2-a} x^a H(x) y^{2-a}.$$

Puisque $x^2H(x) < U(x)$, on en déduit

$$y^a R(y) \leqq \left(1 + \frac{2A}{2-a}\right) x^a R(x),$$

soit en posant $A' = 1 + \dfrac{2A}{2-a}$,

$$\frac{y^a R(y)}{x^a R(x)} \leqq A'.$$

Par conséquent $a < \alpha$ et $\alpha_H \leqq \alpha$.

Si $\beta = 2$, la connaissance de α_H n'implique donc à priori aucune information sur les lois stables de $DC(F)$. Par exemple soit la loi F symétrique, continue, sur $\mathbf{R}$, définie par $H(1)$ et pour $x > 1$ par

$$H(x) = H(x_{2n})\frac{x_{2n}^2}{x^2} \quad \text{si} \quad x_{2n} \leqq x \leqq x_{2n+1},$$

$$H(x) = H(x_{2n+1})\frac{x_{2n+1}^\alpha}{x^\alpha} \quad \text{si} \quad x_{2n+1} \leqq x \leqq x_{2n+2},$$

avec $0 < \alpha < 2$ et $(x_n, n \geqq 1)$ une suite croissante de réels positifs tels que $x_0 = 1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. On pose $r_n = x_{2n+1}/x_{2n}$ et $\rho_n = x_{2n+2}/x_{2n+1}$. Si $r_n \to \infty$, $\rho_n \to \infty$ et $\rho_n^{2-\alpha}/\log r_n \to 0$ quand $n \to \infty$, $\alpha_H = \alpha$, $\beta_H = 2$ et la seule loi stable de $DC(F)$ est la loi normale.

Par contre si on pose $\rho_n^2 = x_{2n+2}/x_{2n+1}$, $z_{2n+1} = \rho_n x_{2n+1}$ et si on considère la suite des fonctions de Lévy $(M_n, n \geqq 1)$ définies par

$$M_n(x) = \frac{H(z_{2n+1}x)}{H(z_{2n+1})}, \qquad x \geqq 0,$$

alors $\lim_{n\to\infty} M_n(x) = x^{-\alpha}$ pour tout $x > 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int_0^\varepsilon y^2\, dM_n(y) = 0$ et la loi stable d'exposant α figure dans le dérivé convexe de F.

Remarquons encore que d'après ce qui précède $\beta = 2$ si et seulement si la loi normale est dans $DC(F)$. Or la proposition 1.3 implique déjà que $\beta = 2$ si et seulement si la loi normale est dans $D(F)$. L'introduction du dérivé convexe de F n'apporte donc rien en ce qui concerne la loi normale, ce qui n'est pas le cas pour les autres lois stables.

3. Compacité stochastique

Une famille $(F_i, i \in I)$ de lois de probabilité est dite stochastiquement compacte (ou plus brièvement compacte) si de toute suite $(F_{i_n}, n \geqq 1)$ issue de la famille on peut extraire une sous-suite qui converge vers une loi de probabilité non dégénérée. Il s'agit donc de compacité au sens de la convergence étroite avec la restriction que les limites ne sont pas dégénérées.

Par abus de langage on dira

Définition 3.1. Une loi de probabilité F est dite compacte si et seulement si l'ensemble de ses puissances $(F^{n*}, n \geqq 1)$ l'est.

Autrement dit, la loi de probabilité F est dite compacte si et seulement s'il existe deux suites de réels $(a_n, b_n, n \geqq 1)$, $a_n > 0$, b_n réel telles que la suite des lois de probabilité $\{F^{n*}(a_n x + b_n), n \geqq 1)\}$ soit compacte.

Feller a établi le critère [5].

Théorème (Feller). *Soit F une loi de probabilité symétrique sur la droite réelle. Les conditions équivalentes*

a) $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{t^2 H(t)}{V(t)} < \infty$;

b) *il existe des constantes $0 < r < 2$ et $c > 0$ et un réel $\tau > 0$ tels que*

$$\frac{V(tx)}{V(t)} < Cx^r \quad \textit{pour} \quad t > \tau,\ x > 1$$

sont nécessaires et suffisantes pour que la loi de probabilité F soit compacte.

Supposons maintenant que, comme précédemment, la loi de probabilité F est symétrique et satisfait aux hypothèses H_1 et H_2. Les conditions de Feller sont alors celles de la proposition 1.2 avec $\tau = 1$. Avec les notations du paragraphe précédent, le théorème de Feller s'exprime dans ce cas, THÉORÈME 3.2. *Soit F une loi de probabilité symétrique d'indices (α, β). Alors F est compacte si et seulement si $\alpha > 0$.*

Les conditions de Feller sont en effet équivalentes, d'après la proposition 1.2, à la condition

$$\frac{R(tx)}{R(t)} < Cx^{r-2}, \qquad t > \tau,\ x > 1$$

avec $0 < r < 2$, et $C > 0$, d'où le résultat.

Soit maintenant $(X_n, n \geqq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose les variables symétriques et on note F_n la loi de probabilité de X_n.

On note $[X, 0]$ le complété, pour une métrique invariante par translation associée à la convergence en probabilité, de la variété linéaire constituée des combinaisons linéaires des X_n; si pour $p > 0$, les variables X_n sont toutes dans $L^p(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on note $[X, p]$ le complété dans L^p de cette même variété linéaire.

Pour $0 \leqq p < 2$, soit $f_{p,n}$ la fonction réelle définie sur la droite réelle, symétrique, telle que pour $y \geqq 0$

$$f_{p,n}(y) = y^2 \int_0^{1/y} u^2\, dF_n(u) + y^p \int_{1/y}^{\infty} u^p dF_n(u).$$

On remarque que $f_{p,n}(y) = E[(yX_n)^2 \wedge (yX_n)^p]$.

On sait [2] que pour toute suite $(c_n, n > 1)$ de réels, la série $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n X_n$ converge dans L^p, (resp. en probabilité) si et seulement si la série $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_{p,n}(c_n)$ (resp. $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_{0,n}(c_n)$) converge.

On se propose maintenant d'établir un critère de compacité d'un type différent de celui de Feller.

THÉORÈME 3.3. *Soit F une loi de probabilité symétrique sur la droite réelle et soit $(X_n, n \geqq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi F. Alors la loi F est compacte si et seulement s'il existe un réel p, $0 < p < 2$, tel que $[X, 0] = [X, p]$.*

Supposons d'abord F compacte. On note f_p et f_0 les fonctions définies ci-dessus associées à la loi F. Il suffit de montrer qu'il existe un réel p, $0 < p < 2$, tel que les fonctions f_0 et f_p soient équivalentes pour $y < 1$.

Les fonctions f_0 et f_p s'écrivent, en intégrant par parties,

$$f_0(y) = -y^2 \int_0^{1/y} u^2\, dH(u) + H\left(\frac{1}{y}\right) = 2y^2 \int_0^{1/y} u H(u)\, du,$$

$$f_p(y) = 2y^2 \int_0^{1/y} u H(u)\, du + p y^p \int_{1/y}^{\infty} u^{p-1} H(u)\, du.$$

Pour $x > 1$, fixé,

$$y^p \int_{1/y}^{\infty} u^{p-1} H(u)\, du = y^p \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x^k/y}^{x^{k+1}/y} u^{p-1} H(u)\, du < \frac{x^p - 1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp} H\left(\frac{x^k}{y}\right).$$

L'hypothèse de compacité entraîne, par le théorème de Feller et la proposition 1.2,

$$H\left(\frac{x^k}{y}\right) < \gamma \frac{y^2}{x^{2k}} V\left(\frac{x^k}{y}\right),$$

et

$$V\left(\frac{x^k}{y}\right) < C x^{kr} V\left(\frac{1}{y}\right).$$

D'où

$$y^p \int_{1/y}^{\infty} u^{p-1} H(u)\, du < B \sum_{k=0}^{\infty} x^{(p-2+r)k} y^2 V\left(\frac{1}{y}\right)$$

où

$$B = \frac{x^p - 1}{p} \gamma C.$$

Puisque $r < 2$, on peut toujours trouver un $p > 0$ tel que $p + r < 2$. Pour un tel p, la série $\sum_{k=0}^{\infty} x^{(p-2+r)k}$ est convergente et

$$y^p \int_{1/y}^{\infty} u^{p-1} H(u)\, du < \theta y^2 V\left(\frac{1}{y}\right)$$

avec $\theta = B \sum_{k=0}^{\infty} x^{(p-2+r)k}$.

Puisque

$$f_p(y) = y^2 V\left(\frac{1}{y}\right) + H\left(\frac{1}{y}\right) + p y^p \int_{1/y}^{\infty} u^{p-1} H(u)\, du$$

on a

$$f_p(y) < (p\theta + 1)\left(y^2 V\left(\frac{1}{y}\right) + H\left(\frac{1}{y}\right)\right),$$

soit

$$f_p(y) < (p\theta + 1) f_0(y)$$

pour $0 < y < 1$. Comme $f_0(y) < f_p(y)$, les fonctions f_0 et f_p sont équivalentes et $[X, 0] = [X, p]$.

Supposons qu'inversement il existe p, $0<p<2$, tel que $[X,0]=[X,p]$. Il en résulte que pour tout p', $0<p'<p$, on a $[X,0]=[X,p']=[X,p]$. Fixons $p'=p/2$ et notons $\| \ \|_p$ la norme ou la quasi-norme selon que $p \geqq 1$ ou $p<1$.

L'ensemble $E=\{Z \in [X,p],\ \|Z\|_{p/2}=1\}$ est relativement compact en loi puisque pour tout $\varepsilon>0$, $P\{|Z|>\varepsilon\}<\varepsilon^{-p/2}$ pour tout $Z \in E$. Montrons que la loi dégénérée (ici Z telle que $P(Z=0)=1$ puisque toutes les variables sont symétriques) ne fait pas partie des lois limites. Puisque $[X,p]=[X,p/2]$, alors $\|Z\|_{p/2}=1$ entraîne $\|Z\|_p<C$ pour tout $Z\in E$, avec $C>0$, et $\{|Z|^{p/2},\ Z \in E\}$ est un ensemble équi-intégrable puisque pour tout $n \geqq 1$,

$$\int_{\{|Z|^{p/2}>n\}} |Z|^{p/2}dP \leqq \left(\int |Z|^p dP\right)^{1/2} [P(|Z|^{p/2}>n)]^{1/2}.$$

D'où

$$\int_{\{|Z|^{p/2}>n\}} |Z|^{p/2}dP \leqq \left(\frac{C^p}{n}\right)^{1/2}.$$

On en déduit

$$1=E(|Z|^{p/2})=\int_{\{|Z|^{p/2}\leqq 1/2\}} |Z|^{p/2}dP+\int_{\{1/2<|Z|^{p/2}\leqq n\}} |Z|^{p/2}dP+\int_{\{|Z|^{p/2}>n\}} |Z|^{p/2}dP$$

et

$$\int_{\{1/2<|Z|^{p/2}\leqq n\}} |Z|^{p/2}dP>\frac{1}{2}-\left(\frac{C^p}{n}\right)^{1/2},$$

ce qui entraîne que Z n'est pas de loi dégénérée.

Choisissons maintenant la suite $(a_n,\ n \geqq 1)$ de réels telle que $Y_n=(X_1+\cdots+X_n)/a_n$ soit dans E pour tout $n \geqq 1$ (c'est-à-dire $a_n=\|X_1+\cdots+X_n\|_{p/2}$). La suite $(a_n,\ n\geqq 1)$ est telle que $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. La loi F est donc compacte.

Remarque 3.4. L'énoncé du théorème précédent implique seulement l'existence d'un p, $0<p<2$, tel que $[X,p]=[X,0]$. On peut préciser les valeurs de p plus complètement. En effet dans la démonstration du théorème 3.3, il apparaît qu'un p convenable est tel que $p+r<2$. Par définition de α et la proposition 1.2, toutes les valeurs de p, $0<p<\alpha$ conviennent.

Remarque 3.5. Il est à noter que dans le théorème 3.3, l'existence d'un p tel que $[X,0]=[X,p]$ est prouvée sans qu'il ait été fait d'hypothèse sur l'existence de moments pour la loi F.

Remarque 3.6. Puisque pour tout $x>0$, $f_0(x)=R(1/x)$, on a $\alpha_{f_0}=\alpha$ et $\beta_{f_0}=\beta$ où α_{f_0} et β_{f_0} sont définis, comme dans [7], pour les fonctions d'Orlicz par

$$\alpha_{f_0} = \sup\left\{p, \limsup_{x\to 0} \sup_{y<x} \frac{x^p f_0(y)}{y^p f_0(x)} < \infty\right\}$$

$$\beta_{f_0} = \inf\left\{p, \liminf_{x\to 0} \inf_{y<x} \frac{x^p f_0(y)}{y^p f_0(x)} > 0\right\}.$$

Par conséquent, si $[X,0] = l_{f_0}$, les indices de la loi F et de la fonction f_0 sont les mêmes.

4. Isomorphismes

Soit comme précédemment F une loi de probabilité symétrique sur la droite réelle et soit $(X_n, n \geqq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi F.

On note encore f_0 la fonction définie pour $y \geqq 0$ par

$$f_0(y) = \int_0^\infty (y^2u^2 \wedge 1)\, dF(u)$$

et soit f_0' la fonction définie pour $y \geqq 0$ par

$$f_0'(y) = \int_0^1 \psi(yt)\, dt,$$

où $\psi(t) = 2\int_0^\infty (1 - \cos ut)\, dF(u)$ est la seconde fonction caractéristique de la loi indéfiniment divisible accompagnante de F. Les fonctions f_0 et f_0' sont équivalentes [1] et la convergence de la série $\Sigma_{n=1}^\infty c_n X_n$ en probabilité, $(c_n, n \geqq 1)$ suite de réels, équivalente à la convergence de la série $\Sigma_{n=1}^\infty f_0(c_n)$ est donc équivalente aussi à la convergence de la série $\Sigma_{n=1}^\infty f_0'(c_n)$.

D'autre part l'espace $[X,0]$ est un espace F-normé; deux espaces F-normés E et E' sont isomorphes s'il existe une application linéaire, continue, biunivoque de E sur E'; si E est isomorphe à un sous-espace de E', on dit que E se plonge isomorphiquement dans E [8].

A l'aide des résultats des paragraphes précédents, on va montrer

THÉORÈME 4.1. *Soit $(X_n, n \geqq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, symétriques, de même loi de probabilité F. Pour tout réel q, s'il en existe, tel que la loi stable d'exposant q soit dans le dérivé convexe de F, l'espace l^q se plonge isomorphiquement dans l'espace $[X,0]$ engendré par la suite $(X_n, n \geqq 1)$.*

Nous allons construire, pour montrer le théorème, un sous-espace de $[X,0]$ isomorphe à un tel l^q, en utilisant une technique par "blocs" usuelle en théorie des espaces de Banach [7].

Supposons donc que le dérivé convexe de F contienne des lois stables autres que la loi normale et soit q l'exposant d'un telle loi. Soit $(Z_n, n \geqq 1)$ la suite des variables aléatoires, construites à partir des variables X_n, de la forme $Z_n = \Sigma_{j=0}^{k_n} X_j^n / t_j^n$ dont les lois de probabilité $*_{j=0}^{k_n} F(t_j^n x)$ convergent vers la loi stable d'exposant q. Les variables Z_n peuvent être construites à partir de variables X_j^n distinctes pour chaque n, ce que nous ferons. Ceci entraîne que la suite $(Z_n, n \geqq 1)$ est indépendante. Si on note $[Z, 0]$ le complété de la variété engendrée par les combinaisons linéaires des variables Z_n, il est clair que $[Z, 0] \subset [X, 0]$.

Soit $-\psi_n$ la deuxième fonction caractéristique de la loi accompagnante de Z_n c'est-à-dire la deuxième fonction caractéristique de la variable $\Sigma_{j=0}^{k_n} Y_j^n / t_j^n$ avec les notations de la proposition 2.9. D'après ce qui précède, la série $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n Z_n$, $(c_n, n \geqq 1)$ suite de réels, converge dans $[X, 0]$ si et seulement si $\Sigma_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \psi_n(c_n t)\, dt < \infty$.

Par construction même des variables Z_n, la suite des fonctions $\psi_n(t)$ converge, uniformément sur $[0, 1]$, vers t^q quand $n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$; pour tout $n \geqq 1$, on peut trouver une variable Z_{j_n} telle que

$$|\psi_{j_n}(t) - t^q| < \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad 0 < t < 1.$$

Pour toute suite $(c_n, n \geqq 1)$ de réels telle que $\sup_n |c_n| \leqq 1$, on a de même, pour tout $n \geqq 1$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \psi_{j_i}(c_i t) - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^q t^q \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i},$$

d'où

$$\frac{1}{q+1} \sum_{i=1}^{n} |c_i|^q - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_{j_i}(c_i t) \right) dt$$

$$< \frac{1}{q+1} \sum_{i=1}^{n} |c_i|^q + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}.$$

Il s'ensuit que $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n Z_{j_n}$ converge dans $[X, 0]$ si et seulement si $(c_n, n \geqq 1) \in l^q$. Le sous-espace $[Z, 0]$ de $[X, 0]$ est donc isomorphe à l^q, d'où le résultat.

Supposons maintenant que la loi F est stochastiquement compacte. Alors par la remarque 3.4, pour tout p, $0 < p < \alpha$, $[X, 0] = [X, p]$. Ces espaces sont alors des espaces p-normés et même des espaces de Banach si $\alpha > 1$. De même les espaces l^q, $\alpha \leqq q \leqq \beta$, sont des espaces p-normés ou des espaces de Banach selon que $q < 1$ ou que $q \geqq 1$.

On obtient dans ce cas

THÉORÈME 4.2. *Soit $(X_n, n \geqq 1)$ une suite de variables aléatoires, réelles, indépendantes, de même loi de probabilité symétrique F, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que F est stochastiquement compacte et soient α et β ses indices. Alors pour tout q, $\alpha \leqq q \leqq \beta$, l'espace l^q se plonge isomorphiquement dans $[X, p]$ pour tout p, $0 \leqq p < \alpha$.*

La démonstration est celle du théorème 3.3. On montre que le sous-espace $[Z, 0]$ de $[X, 0]$ est isomorphe à l^q pour $\alpha \leqq q \leqq \beta$, il en est de même de $[Z, p]$, sous-espace de $[X, p]$, $p < \alpha$, d'où le résultat.

Selon les valeurs de p et q, on peut obtenir là des isomorphismes d'espaces p-normés ou d'espaces de Banach.

REFERENCES

1. J. Bretagnolle et D. Dacunha-Castelle, *Applications de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4° série **2** (1969), 437–480.

2. D. Dacunha-Castelle et M. Schreiber, *Techniques probabilistes pour l'étude de problèmes d'isomorphisme entre espaces de Banach*. Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B **10** (1974), 229–277.

3. W. Doeblin, *Sur l'ensemble des puissances d'une loi de probabilité*, Studia Math. **9** (1940), 71–96.

4. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II, John Wiley, New York, 1966.

5. W. Feller, *On regular variation and local limit theorems, in Proc. 5th Berkeley Symposium on Probability and Statistical Probability Theory*, Vol. 1, 1967, pp. 373–388.

6. B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for sums of independant random variables*, Addison Wesley, Cambridge, Mass., 1954.

7. L. Lindenstrauss and T. Tzafriri, *On Orlicz sequence spaces*, Part I, Israel J. Math. **10** (1971), 379–390; Part II, Israel J. Math. **11** (1972), 355–379; Part III, Israel J. Math. **14** (1973), 368–389.

8. M. Schreiber, *Quelques remarques sur les caractérisations des espaces L^p, $0 \leqq p < 1$*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect B **8** (1972), 83–92.

U.E.R. SCIENCES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITE DE NANCY I
CASE OFFICIELLE 140
54037 — NANCY CEDEX, FRANCE